Las tres raíces cúbicas de i obtenidas en el ejemplo 2 se representan gráficamente en la **FIGURA 10.7.1**. Hacemos notar que están espaciadas por igual alrededor de un círculo de radio 1 centrado en el origen. En general, las n raíces n-ésimas distintas de un número complejo z diferente de cero están espaciadas por igual en la circunferencia del círculo de radio $|z|^{1/n}$ con centro en el origen.

Como muestra el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen que ser números "compatibles" como los del ejemplo 2.

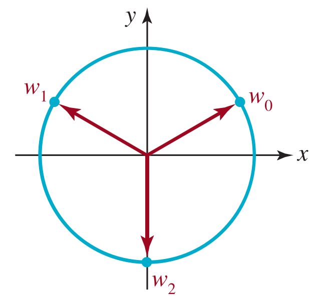

FIGURA 10.7.1 Tres raíces cúbicas de i en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación

Resuelva la ecuación $z^4 = 1 + i$.

Solución Resolver esta ecuación es equivalente a obtener las cuatro raíces complejas de orden 4 del número $1 + i$. En este caso, el módulo y un argumento de $1 + i$ son, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pi/4$, respectivamente. Por (4), con $n = 4$ y el símbolo z_k representando el papel de w_k, obtenemos

$$\begin{aligned} z_k &= (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 0, \quad z_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{16}\right) \\ k = 1, \quad z_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{16}\right) \\ k = 2, \quad z_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{17\pi}{16}\right) \\ k = 3, \quad z_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{25\pi}{16}\right). \end{aligned}$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las formas estándares aproximadas,

$$\begin{aligned} z_0 &\approx 1.0696 + 0.2127i \\ z_1 &\approx -0.2127 + 1.0696i \\ z_2 &\approx -1.0696 - 0.2127i \\ z_3 &\approx 0.2127 - 1.0696i. \end{aligned}$$

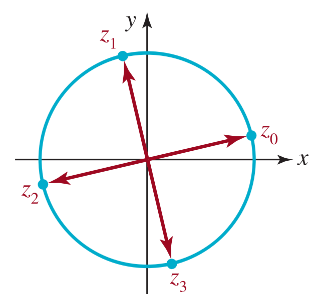

FIGURA 10.7.2 Cuatro raíces de cuarto orden de $1 + i$ del ejemplo 3

Como se muestra en la **FIGURA 10.7.2**, las cuatro raíces se sitúan en un círculo centrado en el origen, de radio $r = \sqrt[8]{2} \approx 1.09$, y están espaciadas a intervalos angulares iguales de $2\pi/4 = \pi/2$ radianes, comenzando con la raíz cuyo argumento es $\pi/16$. ≡

10.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los ejercicios 1-10 use el teorema de DeMoivre para obtener la potencia indicada. Escriba la respuesta en la forma estándar $z = a + bi$. Si es preciso, use una calculadora.

1. $\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{8}\right)^{24}$

2. $\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{10}\right)^{5}$

3. $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^4$

4. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{16}\right)\right]^4$

5. $[\sqrt{3}(\cos 21° + i\,\mathrm{sen}\,21°)]^{10}$

6. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{24}\right)\right]^8$

7. $[\sqrt{5}(\cos 13.5° + i \text{ sen } 13.5°]^6$

8. $[2(\cos 67° + i \text{ sen } 67°]^3$

9. $[3.2(\cos 12° + i \text{ sen } 12°]^3$

10. $[\frac{1}{2}(\cos 24° + i \text{ sen } 24°]^3$

En los problemas 11 y 12, use (3) de esta sección y (4) de la sección 10.6 para simplificar el número complejo dado. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

11. $\dfrac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}{\left[4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)\right]^{3}}$

12. $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}}{\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{5}}$

En los problemas 13 a 24, use la forma trigonométrica de un número complejo junto con el teorema de DeMoivre para calcular la potencia dada. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + b$.

13. i^{30}

14. $-i^{15}$

15. $(1 + i)^6$

16. $(1 - i)^9$

17. $(-2 + 2i)^4$

18. $(-4 - 4i)^3$

19. $(\sqrt{3} + i)^5$

20. $(-\sqrt{3} + i)^{10}$

21. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^9$

22. $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i\right)^8$

23. $(1 + 2i)^4$

24. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{20}$

En los problemas 25 a 34, obtenga las raíces indicadas. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

25. Las tres raíces cúbicas de -8.

26. Las tres raíces cúbicas de 1.

27. Las cuatro raíces cuartas de i.

28. Las dos raíces cuadradas de i.

29. Las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.

30. Las dos raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$.

31. Las dos raíces cuadradas de $1 + i$.

32. Las tres raíces cúbicas de $-2\sqrt{3} + 2i$.

33. Las seis raíces sextas de $64(\cos 54° + i \text{ sen } 54°)$.

34. Las dos raíces cuadradas de $81\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$.

En los problemas 35 y 36, obtenga las raíces indicadas. Proceda como en el ejemplo 2 y dibuje la gráfica de estas raíces en un círculo apropiado.

35. Las seis raíces sextas de 1.

36. Las ocho raíces octavas de 1.

37. ¿Para cuáles enteros positivos n será $(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2)^n$ igual a 1? ¿Igual a i? ¿Igual a $-\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2$? ¿Igual a $\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2$?

38. *a*) Compruebe que $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$.
 b) Use la parte *a*) para obtener los dos valores de $(7 + 24i)^{1/2}$.

En los problemas 39 a 42, resuelva la ecuación dada. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

39. $z^4 + 1 = 0$

40. $x^3 - 125i = 0$

41. $x^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

42. $z^2 - 8z + 18 = 8i$

Para la discusión

43. El teorema de DeMoivre implica que

$$(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^2 = \cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta.$$

Use esta información para obtener las identidades trigonométricas de $\cos 2\theta$ y $\text{sen } 2\theta$, multiplicando el lado izquierdo de la ecuación e igualando después las partes real e imaginaria.

44. Siga un procedimiento análogo al que se indicó en el problema 43 para obtener las identidades trigonométricas de $\cos 3\theta$ y $\text{sen } 3\theta$.